BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini, dibahas tentang hasil yang diperoleh dengan langkah-langkah untuk mendapatkan solusi fundamental persamaan eliptik.

4.1. Pemilihan Solusi Radial

Persamaan eliptik yang digunakan pada skripsi ini adalah

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_i(D_j u) = 0, \tag{4.1}$$

di mana a_{ij} adalah elemen dari matriks definit positif, $u = u(x)$ dan $x \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Untuk mencari solusi fundamental dari persamaan eliptik, maka harus didefinisikan terlebih dahulu suatu r sebagai solusi radial.

Definisi 4.1.1 (Solusi Radial)
Solusi radial r merupakan solusi dimana variabel bebas x bervariasi pada ruang variabel dengan domain simetri radial, seperti bola yang berpusat pada satu titik.

Dengan metode *trial and error* maka dapat diperoleh r yang sesuai untuk persamaan eliptik (4.1), sehingga dapat didefinisikan r sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r =& \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j} \\ =& (b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 ... + b_{nn}x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

di mana b_{ij} adalah elemen dari matriks kofaktor (a_{ij}).

Teorema 4.1.2 (Turunan Parsial Pertama)
Diberikan

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j} \tag{4.2}$$

maka turunan parsial pertama r terhadap x_j adalah

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i.$$

Bukti.
Misal r yang diberikan seperti pada (4.2), maka turunan parsial r terhadap x_k adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_k} &= \frac{(b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + ... + b_{kn}x_n) + (b_{1k}x_1 + ... + b_{nk}x_n)]}{2r} \\ &= \frac{(b_{k1} + b_{1k})x_1 + (b_{k2} + b_{2k})x_2 + ... + (b_{kn} + b_{nk})x_n}{2r}\end{aligned}$$

untuk $k = 1, 2, ..., n$ maka $\dfrac{\partial r}{\partial x_k}$ dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{1}{2r} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (b_{ki} + b_{ik}) x_i, \tag{4.3}$$

b_{ij} adalah elemen dari matriks definit positif, karena matriks definit positif adalah matriks simetris, maka $b_{ki} = b_{ik}$. Sehingga untuk suatu $k = j$ persamaan (4.3) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_j} &= \frac{1}{2r} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 2b_{ij} x_i \\ &= \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i.\end{aligned}$$

■

Teorema 4.1.3 (Turunan Parsial Kedua)
Diberikan

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j} \tag{4.4}$$

maka turunan parsial kedua r terhadap x_i dan x_j adalah

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} - \frac{1}{r^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k \right).$$

Bukti.

Misal diberikan r seperti pada (4.4), sebelum mencari turunan parsial kedua r terhadap x_i dan x_j yang dinotasikan dengan $\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}$, akan dicari terlebih dahulu turunan $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} x_i$ terhadap x_i,

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} x_i \right)}{dx_i} &= \frac{d(b_{11}x_1 + b_{12}x_1 + ... + b_{1n}x_1 + ...b_{nn}x_n)}{dx_i} \\ &= b_{i1} + b_{i2} + ... + b_{in}, \end{aligned}$$

sehingga untuk $i = 1, 2, .., n$ persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} x_i \right)}{dx_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}.$$

Berdasarkan persamaan diatas maka diperoleh $\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{1}{r^2} \left(r \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} - \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_k \sum_{i,j=1}^{n} b_{jk} x_k \right) \right) \\ &= \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} - \frac{1}{r^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k \right). \end{aligned}$$

■

Teorema 4.1.4 (Turunan Total)
Misal diberikan

$$u(x) = v(r) \tag{4.5}$$

maka turunan parsial u terhadap x_j adalah turunan total $v(r)$ terhadap x_j yaitu

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_j u = \frac{v'(r)}{r} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i.$$

Bukti.
Berdasarkan (4.5) maka turunan parsial u terhadap x_j yang dinotasikan sebagai $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} D_j u = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}$ adalah turunan total $v(r)$ terhadap x_j

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_j u =& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\\ =& \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial x_j}\\ =& \frac{v'(r)}{r} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i.\end{aligned}$$

■

Akibat 4.1.5 (Sistem Persamaan Linear Matriks Definit Positif)
Jika dibentuk suatu matriks definit positif $A_{n\times n}$ dengan elemen a_{ij} dan matriks kofaktor $B_{n\times n}$ dengan elemen b_{ij} seperti pada (4.6) dan (4.7)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

maka sistem persamaan linear dari perkalian matriks A dan B adalah

$$\begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ...a_{1n}b_{n1} &= \det A \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + ...a_{1n}b_{n2} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + ...a_{1n}b_{nn} &= 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + ...a_{2n}b_{n2} &= \det A \\ &\vdots \\ a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + ...a_{nn}b_{nn} &= \det A. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Bukti.
A adalah matriks definit positif, dan B adalah matriks kofaktor dari A sehingga

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}B.$$

maka

$$\begin{aligned} AA^{-1} =& \frac{1}{\det A}AB \\ I =& \frac{1}{\det A}AB \\ I(\det A) =& AB. \end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga perkalian matriks di atas menghasilkan sistem persamaan linear seperti pada (4.8). ■

4.2. Solusi Fundamental

Akibat 4.2.1
Diberikan suatu persamaan eliptik

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_i(D_j u) = 0$$

seperti pada (4.1), maka bentuk dari persamaan (4.1) dapat diubah menjadi persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{v''(r)}{r^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k \right) + \frac{v'(r)}{r} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \\
& - \frac{v'(r)}{r^3} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k \right).
\end{aligned}$$

Bukti.
Untuk membentuk $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} D_i(D_j u)$, maka akan dicari terlebih dahulu $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} D_i(D_j u)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_i(D_j u) = & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \\
= & \frac{v''(r)}{r} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \cdot \frac{1}{r} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k \right) + \frac{v'(r)}{r} \cdot \\
& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} - \frac{v'(r)}{r^3} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k \right) \\
= & \frac{v''(r)}{r^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k \right) + \frac{v'(r)}{r} \cdot \\
& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} - \frac{v'(r)}{r^3} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k \right),
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_i(D_ju)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_i(D_ju) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\\ &= \frac{v''(r)}{r^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right)\\ &\quad + \frac{v'(r)}{r}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} - \frac{v'(r)}{r^3}\cdot\\ &\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right).\end{aligned}$$

Berdasarkan (4.1) maka $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_i(D_ju) = 0$ jika dan hanya jika

$$\begin{aligned}0 =& \frac{v''(r)}{r^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right) + \frac{v'(r)}{r}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\\ &- \frac{v'(r)}{r^3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right). \qquad (4.9)\end{aligned}$$

■

Akibat 4.2.2

Jika diberikan jumlahan pada suku kedua pada persamaan (4.9) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$, maka jumlahan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = n\det A.$$

Bukti.

Berdasarkan sistem (4.8) dan **Teorema 2.1.3** jika matriks A dan matriks B merupakan matriks simetris, maka $a_{ij} = a_{ji}$ dan $b_{ij} = b_{ji}$, sehingga jumlahan pada suku kedua persamaan (4.9) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} =&(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + ... + a_{1n}b_{1n}) + (a_{21}b_{21}+ \\ & a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23} + ... + a_{2n}b_{2n}) + ... + (a_{n1}b_{n1} + a_{n2}b_{n2} \\ & + ... + a_{nn}b_{nn}) \\ =& \det A + \det A + ... + \det A \\ =& n \det A.\end{aligned}$$

■

Akibat 4.2.3

Jika diberikan jumlahan pada suku pertama dan terakhir pada persamaan (4.9) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right)$, maka jumlahan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right) = (\det A)r^2.$$

Bukti.

Dengan menggunakan sistem dan teorema yang sama seperti bukti pada **Akibat 4.2.2**, untuk menyederhanakan jumlahan pada suku pertama dan terakhir yaitu $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right)$ dapat didefinisikan suatu Y_1 pada saat $i = 1$ dan $j = 1, 2, .., n$ sebagai berikut

$$Y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{1k}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right)$$

$$
\begin{aligned}
Y_1 =& a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n)(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n) + \\
& a_{12}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n)(b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + ... + b_{2n}x_n) + ... \\
& + a_{1n}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n)(b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + ... + b_{nn}x_n) \\
=& (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n)(a_{11}b_{11}x_1 + a_{11}b_{12}x_2 + ... + a_{11}b_{1n}x_n \\
& + a_{12}b_{21}x_1 + a_{12}b_{22}x_2 + ... + a_{12}b_{2n}x_n + ... + a_{1n}b_{n1}x_1 + \\
& a_{1n}b_{n2}x_2 + ... + a_{1n}b_{nn}x_n) \\
=& (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n)(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1n}b_{n1})x_1 \\
& + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + ... + a_{1n}b_{n2})x_2 + ... + (a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + ... \\
& + a_{1n}b_{nn})x_n \\
=& (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + ... + b_{1n}x_n)(\det A)x_1 \\
=& (\det A)\sum_{j=1}^{n} b_{1j}x_jx_1,
\end{aligned}
$$

sehingga untuk $i = 1, 2, .., n$ maka

$$
\begin{aligned}
Y_i =& (\det A)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j \\
=& (\det A)r^2.
\end{aligned}
$$

■

Dengan menggunakan **Akibat 4.2.2** dan **Akibat 4.2.3** maka persamaan (4.9) dapat disederhanakan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
0 =& \frac{v''(r)}{r^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right) + \frac{v'(r)}{r} \cdot \\
& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} - \frac{v'(r)}{r^3} \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right) \\
0 =& \frac{v''(r)}{r^2}(\det A)r^2 + \frac{v'(r)}{r}n(\det A) - \frac{v'(r)}{r^3}(\det A)r^2 \\
0 =& (\det A)\left(\frac{v''(r)}{r^2}r^2 + \frac{v'(r)}{r}n - \frac{v'(r)}{r^3}r^2\right)
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

$$
\begin{aligned}
0 =& v''(r) + \frac{v'(r)}{r}n - \frac{v'(r)}{r}\\
0 =& v''(r) + \frac{v'(r)}{r}(n-1)\\
\frac{v''}{v'} =& \frac{1-n}{r}.
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

Karena $(ln(v'))' = \dfrac{v''}{v'}$, maka persamaan (4.11) dapat ditulis sebagai

$$
\begin{aligned}
(ln(v'))' &= \frac{1-n}{r}\\
ln(v') &= \int \frac{1-n}{r}dr\\
ln(v') &= (1-n)ln(r) + c\\
ln(v') + (n-1)ln(r) &= c\\
ln(v') + ln(r^{n-1}) &= c\\
ln(v'r^{n-1}) &= c\\
ln(v'r^{n-1}) &= ln(a)\\
v'r^{n-1} &= a\\
v' &= ar^{1-n}.
\end{aligned}
$$

Domain dari x berada pada n-dimensi sehingga $n \geqslant 2$. Selanjutnya akan dicari $v(r)$ pada saat $n = 2$ dan $n > 2$ untuk mengetahui bentuk umum dari $v(r)$

$$
\begin{aligned}
&\text{untuk} \qquad \text{n} = 2, \qquad & \text{v}' &= ar^{-1}\\
&&v &= \int ar^{-1}dr\\
&&&= a(\ln r) + b.\\
&\text{untuk} \qquad \text{n} = 3, \qquad & \text{v}' &= ar^{-2}\\
&&v &= \int ar^{-2}dr\\
&&&= \frac{-a}{r} + c.
\end{aligned}
$$

$$\text{untuk} \qquad n = 4, \qquad \text{v}' = ar^{-3}$$

$$v = \int ar^{-1} dr$$

$$= \frac{-a}{2r^2} + d. \qquad \text{dst.}$$

sehingga untuk $n > 2$ diperoleh $v = \dfrac{c}{r^{n-2}} + b$.

Berdasarkan hasil di atas, $v(r)$ memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$v(r) = \begin{cases} a(\ln r) + b, & n = 2 \\ \dfrac{c}{r^{n-2}} + b, & n \geqslant 3. \end{cases} \tag{4.12}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$. Dengan menskala ulang (4.12) ke persamaan $u(x) = v(r)$, di mana $r = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \right)^{\frac{1}{2}}$, maka diproleh solusi fundamental persamaan eliptik adalah

$$u(x) = \begin{cases} a \ln \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \right)^{\frac{1}{2}} + b, & n = 2 \\ \\ c \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j \right)^{\frac{2-n}{2}} + b, & n \geqslant 3 \end{cases} \tag{4.13}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

Remarks:

Misal diberikan suatu matriks identitas I berorde $n \times n$ sebagai koefisien dari persamaan eliptik (4.1)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

di mana I merupakan matriks definit positif, maka dapat dibentuk persamaan eliptik

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_i(D_j u) = 0, \tag{4.14}$$

dengan ketentuan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Untuk mencari solusi fundamental dari persamaan (4.14), maka akan dibentuk suatu $r = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j}$ di mana b_{ij} adalah elemen dari matriks kofaktor I. Karena I merupakan matriks identitas, maka elemen dari matriks kofaktor I sama dengan elemen matriks I. Sehingga diperoleh b_{ij} sebagai berikut

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Berdasarkan a_{ij} dan b_{ij} di atas maka persamaan eliptik (4.14) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_i(D_j u) &= 0 \\ a_{11}D_1(D_1 u) + a_{22}D_2(D_2 u) + ... + a_{nn}D_n(D_n u) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} D_i(D_i u) &= 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

dan diperoleh $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. Persamaan (4.15) ekuivalen dengan persamaan Laplace $\sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$. Sehingga solusi fundamentalnya seperti yang telah diuraikan pada Bab II.